

Osmi domaći zadatak iz predmeta Linearna algebra 1

Preduslov: Pročitati udžbenik do kraja šeste glave

1. Naći Žordanovu formu i kanonsku bazu operatora $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(M_{\leq 2} \rightarrow M_{\leq 2})$ zadanog sa:

$$\mathcal{T}f = -2f' + f'' \quad \forall f \in M_{\leq 2}.$$

2. Naći Žordanovu formu i kanonsku bazu operatora $\mathcal{G} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3)$ zadanog sa:

$$\mathcal{G} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 - 2x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

3. Da li su tačna sljedeća tvrđenja (kratko obrazložiti odgovore):

- Ako dvije matrice imaju iste karakteristične polinome, one su slične.
- Ako su dvije matrice slične, one imaju iste karakteristične polinome.

4. Naći kanonsku bazu i Žordanovu formu matrice:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Pomoć: Karakteristični polinom matrice D ima dvostruki korijen $\lambda = 2$.

5. Provjeriti koje od sljedećih matrica su međusobno slične:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -7 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Naći kanonsku bazu i Žordanovu formu matrice

$$K = \begin{pmatrix} 3/2 & -3 & 1/2 \\ -3/4 & 3/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Naći kanonsku bazu i Žordanovu formu matrice

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & 6 & -4 & -4 \\ 22 & 15 & -8 & -9 \\ -3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pomoć: Provjeriti da karakteristični polinom ima korijene $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$.

8. Napisati dvije različite matrice koje su slične matrici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pomoć: Potrebno je izabrati neke regularne matrice G i H , pa izračunati $G^{-1}BG$ i $H^{-1}BH$.

9. Zadane su matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & -1/2 \\ -1/4 & -1/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Naći matricu G takvu da $A = G^{-1}JG$.

Pomoć: Provjeriti da je J Žordanova forma matrice A . Dalje, naći kanonsku bazu za matricu A i od vektora kanonske baze formirati matricu G .